

# HARMONIQUES CREEES PAR EXCITATION PARAMETRIQUE DANS LES ANEMOMETRES A FIL CHAUD A INTENSITE CONSTANTE

G. COMTE-BELLOT† et J. P. SCHON‡

Ecole Centrale Lyonnaise, 69-Ecully, France

(Reçu le 30 mars 1969)

**Résumé**—Des harmoniques supérieures apparaissent dans la réponse des fils chauds par suite de l'action combinée de l'inertie thermique du fil et des grandes amplitudes des fluctuations de vitesse. On les étudie en simulant sur calculateur analogique l'équation différentielle de réponse du fil dont un coefficient est une fonction aléatoire du temps. Pour diverses perturbations (bruit gaussien, turbulence de grille, turbulence de paroi) on évalue les erreurs systématiques que ces harmoniques entraînent dans les mesures effectuées au moyen des anémomètres à Intensité Constante. En particulier pour une turbulence d'intensité 25 pour cent étudiée au moyen d'un fil chaud dont la constante de temps est égale à  $0,4 \cdot 10^{-3}$  s (vitesse moyenne de l'écoulement : 10 à 20 m/s), l'erreur commise sur les spectres serait égale à 4 pour cent par excès lorsque la pente de la courbe spectrale est voisine de  $-\frac{5}{3}$ ; une erreur de 60 pour cent par excès est estimée possible lorsque cette pente atteindrait  $-7$  environ. L'erreur sur le moment d'ordre 3 de la densité de probabilité des fluctuations de vitesse atteindrait 25 pour cent de celle qui est due à la non-linéarité de la loi d'échange thermique du fil en régime permanent, son signe étant opposé.

### NOTATIONS

$R_a$	Résistance à froid du fil;	$p'_e$	valeur efficace de $p_e$ : $p'_e = \sqrt{p_e^2}$ ;
$R$	valeur instantanée de la résistance à chaud d'un fil réel (possédant de l'inertie thermique);	$a_e$	amplitude d'une fluctuation $p_e$ sinusoïdale;
$R_e$	valeur instantanée de la résistance à chaud d'un fil idéal (dépourvu d'inertie thermique);	$a'_e$	valeur efficace de $a_e$ , $a'_e = \sqrt{a_e^2}$ ;
$\bar{R}$	valeur moyenne de la résistance à chaud d'un fil réel;	$a_1, \dots, a_n$	Coefficients du développement en série de Fourier de $p$ [equation (16)];
$\bar{R}_e$	valeur moyenne de la résistance à chaud d'un fil idéal;	$b_1, \dots, b_m$	pulsation lorsque la fluctuation $p_e$ est sinusoïdale;
$r_e$	fluctuation de la résistance $R_e$ ;	$\omega$	intensité du courant dans le fil chaud;
$P$	$\equiv R - R_a$ ;	$I$	constante de temps du fil définie pour des fluctuations de vitesse de petite amplitude [équation (11)];
$P_e$	$\equiv R_e - R_a$ ;	$M$	mesurée en milliseconde (ms).
$\bar{P}$	valeur moyenne de $P$ ;	$Q$	$\equiv P + M \frac{dP}{dt}$ ;
$p$	fluctuation du signal $P$ ;	$\bar{Q}$	valeur moyenne de $Q$ ;
$\bar{P}_e$	valeur moyenne de $P_e$ ;	$q$	$\equiv p + M \frac{dp}{dt}$ ;
$p_e$	fluctuation du signal $P_e$ ;	$\dot{q}$	$\equiv \frac{dq}{dt}$ ;

† Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lyon, enseignant à l'Ecole Centrale Lyonnaise.

‡ Assistant à la Faculté des Sciences de Lyon, enseignant à l'Ecole Centrale Lyonnaise.

$N$ ,	fréquence;
$\frac{p_e  z}{q - p_e  z}$ ,	spectre de $\frac{p_e^2}{(q - p_e)^2}$ ;
$c$ ,	chaleur spécifique du métal constituant le fil;
$m$ ,	masse du fil chaud;
$\chi$ ,	coefficient de variation de la résistance du fil en fonction de la température dans une loi linéaire;
$U$ ,	composante longitudinale de la vitesse instantanée de l'écoulement;
$V, W$ ,	composantes transversales de la vitesse instantanée (normale et parallèle au fil);
$\bar{U}$ ,	valeur moyenne du $U$ ;
$u$ ,	composante longitudinale de la fluctuation de vitesse;
$v, w$ ,	composantes transversales de la fluctuation de vitesse (normale et parallèle au fil);
$u'$ ,	valeur efficace de $u$ : $u' = \sqrt{u^2}$ ;
$\dot{u}$ ,	$\equiv du/dt$ ;
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ,	constantes intervenant dans la loi de King;
$\alpha$ ,	coefficient de sensibilité du fil aux fluctuations longitudinales de vitesse de petite amplitude, (montage à Intensité Constante: $\alpha \neq \bar{U} (\partial R_e I / \partial \bar{U})$ ;
$\mathcal{C}$ ,	$\equiv - \frac{2\alpha}{I(R_e - R_a)}$ ;
$n$ ,	exposant;
$y$ ,	distance du fil à la paroi;
$u^*$ ,	vitesse de frottement;
$\mathcal{M}$ ,	maille de la grille à turbulence ( $\mathcal{M} = 2,13$ cm);
$A$ ,	bruit gaussien dont le spectre s'étend jusqu'à 160 hz environ;
$B$ ,	bruit gaussien dont le spectre s'étend jusqu'à 640 hz environ;
$C$ ,	bruit gaussien dont le spectre s'étend jusqu'à 2300 hz environ;
$F$ ,	bruit gaussien ayant même spectre que le signal $L$ ;

$L$ ,	turbulence de paroi: $yu^*/v \approx 25$ , $\bar{U} = 10$ m/s;
$G$ ,	turbulence de grille: $x/\mathcal{M} \approx 30$ , $U = 10$ m/s;
$G'$ ,	turbulence de grille: $x/\mathcal{M} \approx 30$ , $\bar{U} = 20$ m/s.

## 1. INTRODUCTION

LA RÉPONSE d'un fil chaud soumis à des fluctuations de vitesse de grande amplitude présente des distorsions qui sont dues à deux causes [1]:

- (1) la non-linéarité de la relation algébrique qui représente la loi d'échange thermique du fil en régime permanent;
- (2) la non-constance des coefficients de l'équation différentielle linéaire du 1<sup>er</sup> ordre qui traduit la réponse du fil en régime transitoire.

La première cause n'interviendrait seule que dans le cas idéal où les fils utilisés seraient dépourvus d'inertie thermique. Bien que cette restriction ne soit pas toujours explicitée, les erreurs entraînées ont été estimées à plusieurs reprises (cf. Annexe 1).

La seconde cause d'erreur est prise en compte par Martinelli et Randall [2] qui résolvent l'équation différentielle par la méthode des isoclines. La précision de cette construction géométrique est cependant insuffisante pour qu'apparaisse la distorsion du signal transmis par le fil. Par contre la résolution au moyen de séries de Fourier effectuée par Corrsin [1] fournit une indication quantitative des harmoniques qui apparaissent. La création de ces harmoniques se rattache à l'effet d'excitation paramétrique qui se manifeste quand les équations différentielles linéaires sont à coefficients variables [3-5].

Il est alors clair que ces harmoniques, créés au niveau du fil, ne peuvent pas être éliminés par le circuit dit "correcteur d'inertie thermique" et associé à un anémomètre à Intensité Constante puisqu'un tel circuit a une réponse linéaire (à une fréquence donnée, il augmente l'amplitude et avance la phase du signal appliqué). Ainsi.

dans les mesures effectuées au moyen d'anémomètres à Intensité Constante des erreurs peuvent apparaître, par exemple sur les spectres d'énergie des fluctuations de vitesse et sur les moments d'ordre impair des densités de probabilité des fluctuations de vitesse. Dans ce rapport on se propose d'examiner ces erreurs et de la comparer avec celles qui proviennent de la première cause.

**2. REPONSE D'UN FIL CHAUD EN REGIME TRANSITOIRE**

La réponse d'un fil d'allongement infini, placé normalement à l'écoulement et peu surchauffé  $[(R - R_a)R_a \leq 0,5]$  s'exprime par l'équation différentielle

$$\frac{mc}{R_a \chi} \frac{d(R - R_a)}{dt} = RI^2 - \frac{R - R_a}{R_a \chi} \phi(U) \quad (1)$$

où  $\phi(U)$  est une fonction de la vitesse qu'il n'est pas utile d'explicitier. Pour séparer les deux causes d'erreur mentionnées précédemment introduisons comme dans [1] la réponse qu'aurait un fil dépourvu d'inertie thermique :

$$0 = R_e I^2 - \frac{R_e - R_a}{R_a \chi} \phi(U) \quad (2)$$

l'indice "e" rappelant le régime d'équilibre que suivrait la résistance d'un tel fil. La différence entre  $R(t)$  et  $R_e(t)$  rend ainsi compte de l'effet combiné de l'inertie thermique du fil et des grandes fluctuations de vitesse; la non-linéarité de la loi d'échange thermique en régime permanent est incluse dans  $R_e(t)$ . En combinant (1) et (2) on obtient l'équation :

$$\frac{mc}{R_a \chi} \frac{1}{R_a I^2} \frac{d(R - R_a)}{dt} + \frac{R - R_a}{R_e - R_a} = 1 \quad (3)$$

qu'on peut écrire

$$\frac{mc}{R_a \chi} \frac{1}{R_a I^2} \frac{dP}{dt} + \frac{P}{P_e} = 1 \quad (4)$$

en posant

$$\begin{aligned} P_e &\equiv R_e - R_a \\ P &\equiv R - R_a \end{aligned} \quad (5)$$

ou encore

$$\frac{mc}{R_a \chi} \frac{1}{R_a I^2} \frac{dp}{dt} + \frac{\bar{P} + p}{\bar{P}_e + p_e} = 1 \quad (6)$$

en décomposant chacun des signaux  $P_e(t)$  et  $P(t)$  en partie moyenne et en partie fluctuante :

$$\begin{aligned} P_e(t) &= \bar{P}_e + p_e(t) \\ P(t) &= \bar{P} + p(t). \end{aligned} \quad (7)$$

L'équation différentielle (4) qui détermine  $P(t)$  à partir de  $P_e(t)$  est linéaire et du 1er ordre. Le coefficient

$$\frac{mc}{R_a \chi} \frac{1}{R_a I^2}$$

est constant dès que l'intensité du courant dans le fil est fixée. Par contre le coefficient  $1/P_e(t)$  n'est pas constant : il est dans le cas général une fonction aléatoire du temps.

**3. CAS PARTICULIER DES PETITES AMPLITUDES**

Lorsque  $p_e \ll \bar{P}_e$  et  $p \ll \bar{P}$  on peut négliger les termes du 2ème ordre dans le développement de  $(\bar{P} + p)/(\bar{P}_e + p_e)$  et écrire l'équation (6) sous la forme approchée

$$\frac{mc}{R_a \chi} \frac{1}{R_a I^2} \frac{dp}{dt} = 1 - \frac{\bar{P}}{\bar{P}_e} \left( 1 + \frac{p}{\bar{P}} - \frac{p_e}{\bar{P}_e} \right). \quad (8)$$

Effectuant une moyenne dans le temps on obtient

$$\bar{P} = \bar{P}_e \quad (9)$$

et (8) se réduit à l'équation différentielle

$$\bar{P}_e \frac{mc}{R_a \chi} \frac{1}{R_a I^2} \frac{dp}{dt} + p = p_e \quad (10)$$

dont les coefficients sont maintenant constants. A la suite de Dryden [6] on introduit la constante de temps  $M$  du fil :

$$M \equiv \bar{P}_e \frac{mc}{R_a \chi} \frac{1}{R_a I^2} \quad (11)$$

de sorte que (10) devient

$$M \frac{dp}{dt} + p = p_e. \quad (12)$$

Le circuit correcteur d'inertie thermique associé à un anémomètre à Intensité Constante forme à partir de  $p(t)$  le signal

$$q(t) = p + M \frac{dp}{dt} \tag{13}$$

qui dans le cas particulier des petites fluctuations, et dans ce cas seulement, est identique au signal  $p_e(t)$ .

**4. GRANDES AMPLITUDES:  
CAS DE PERTURBATIONS SINUSOIDALES**

Revenons à l'équation (4) et remarquons que nous pouvons y introduire la constante  $M$  définie en (11) sans altérer le problème étudié. Ainsi l'équation de base de notre investigation revêt la forme compacte

$$M \frac{dP}{dt} + \frac{P}{P_e} = 1. \tag{14}$$

Pour une perturbation sinusoïdale, soit :

$$P_e(t) = \bar{P}_e + a_e \cos \omega t \tag{15}$$

Corrsin [1] cherche la solution  $P(t)$  sous forme d'un développement en série de Fourier

$$P(t) = \bar{P} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \omega t + b_n \sin n \omega t) \tag{16}$$

afin de mettre en évidence les harmoniques créés. Substituant (15) et (16) dans (14) et négligeant  $a_n, b_n$  et  $(a_e/\bar{P}_e)^n$  pour  $n \geq 3$ , il obtient :

$$\bar{P} = \bar{P}_e - \frac{1}{2} \frac{M^2 \omega^2}{(1 + M^2 \omega^2)} \frac{a_e^2}{\bar{P}_e} \tag{17}$$

$$a_1 = \frac{1}{1 + M^2 \omega^2} a_e \tag{18}$$

$$b_1 = \frac{M \omega}{1 + M^2 \omega^2} a_e \tag{19}$$

$$a_2 = - \frac{3}{2} \frac{M^2 \omega^2}{(1 + M^2 \omega^2)(1 + 4M^2 \omega^2)} \frac{a_e^2}{\bar{P}_e} \tag{20}$$

$$b_2 = - \frac{M \omega (M^2 \omega^2 - \frac{1}{2})}{(1 + M^2 \omega^2)(1 + 4M^2 \omega^2)} \frac{a_e^2}{\bar{P}_e} \tag{21}$$

le fondamental  $a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t$  correspondant d'ailleurs à la solution de l'équation linéarisée (12). La prise en compte des harmoniques suivants ne modifie que de quelques % les valeurs de  $a_1, b_1, a_2, b_2$  ainsi que le montre le tableau 1 ; nous avons calculé les cinq premiers harmoniques en résolvant sur calculateur digital les treize équations à treize inconnues auxquelles conduit alors la substitution de (15) et (16) dans (14) et l'hypothèse  $a_n = b_n = 0$  pour  $n \geq 7$ . Dans la suite nous utiliserons donc les expressions approchées (17) à (21).

Table 1. Valeurs des coefficients du développement (16) pour  $M\omega = 8, d_e/\bar{P}_e = 0,20, \bar{P}_e = 3 V$ ; hypothèse de calcul:

colonne (1):  $a_n = b_n = 0$  pour  $n \geq 3$   
colonne (2):  $a_n = b_n = 0$  pour  $n \geq 7$

	(1)	(2)
$\bar{P}$	2,9409	2,9404
$a_1$	9,2307 $10^{-3}$	9,4631 $10^{-3}$
$b_1$	7,3845 $10^{-2}$	7,4561 $10^{-2}$
$a_2$	6,8961 $10^{-4}$	7,1449 $10^{-4}$
$b_2$	3,6492 $10^{-3}$	3,7206 $10^{-3}$
$a_3$	0	5,8641 $10^{-5}$
$b_3$	0	2,4808 $10^{-4}$
$a_4$	0	5,0360 $10^{-6}$
$b_4$	0	1,8636 $10^{-5}$
$a_5$	0	4,4501 $10^{-7}$
$b_5$	0	1,4946 $10^{-6}$
$a_6$	0	3,9661 $10^{-8}$
$b_6$	0	1,2372 $10^{-7}$

Lorsque le fil chaud est placé dans un montage à Intensité Constante et que l'amplificateur est muni d'un circuit correcteur d'inertie thermique fonctionnant selon la manière rappelée au § 3, le signal de sortie est :

$$q = p + M \frac{dp}{dt} = (a_1 + M \omega b_1) \cos \omega t + (b_1 - M \omega a_1) \sin \omega t + (a_2 + 2M \omega b_2) \cos 2\omega t + (b_2 - 2M \omega a_2) \sin 2\omega t + \dots \tag{22}$$

soit

$$q = a_e \cos \omega t - \frac{a_e^2}{2\bar{P}_e} \frac{M^2 \omega^2}{1 + M^2 \omega^2} \cos 2\omega t + \frac{a_e^2}{2\bar{P}_e} \frac{M \omega}{(1 + M^2 \omega^2)} \sin 2\omega t + \dots \tag{23}$$

d'après (18) à (21). Ainsi la différence entre ce signal et la perturbation exacte est

$$q - p_e = - \frac{a_e^2}{2\bar{P}_e} \frac{M^2\omega^2}{(1+M^2\omega^2)} \cos 2\omega t + \frac{a_e^2}{2\bar{P}_e} \frac{M\omega}{(1+M^2\omega^2)} \sin 2\omega t + \dots \quad (24)$$

On peut déduire de (24) un certain nombre de conséquences :

Le premier harmonique qui apparaît dans  $q(t)$  a pour énergie :

$$\frac{1}{4} \frac{M^2\omega^2}{(1+M^2\omega^2)} \frac{a_e^4}{\bar{P}_e^2} \quad (25)$$

Cette contribution, bien qu'elle soit du 2ème ordre en  $a_e/\bar{P}_e$  n'est pas a priori négligeable car elle a un caractère absolu.

Les moments d'ordre 3, 5, ..., 2n + 1 de la densité de probabilité de  $q(t)$  sont égaux à

$$\frac{\overline{q^3}}{(\overline{q^2})^{\frac{3}{2}}} = - \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{M^2\omega^2}{(1+M^2\omega^2)} \frac{a_e}{\bar{P}_e} + \dots \quad (26)$$

$$\frac{\overline{q^5}}{(\overline{q^2})^{\frac{5}{2}}} = - \frac{5}{\sqrt{2}} \frac{M^2\omega^2}{(1+M^2\omega^2)} \frac{a_e}{\bar{P}_e} + \dots \quad (27)$$

$$\frac{\overline{q^{2n+1}}}{(\overline{q^2})^{n+\frac{1}{2}}} = - \frac{n(2n+1)}{2\sqrt{2}} \frac{M^2\omega^2}{(1+M^2\omega^2)} \frac{a_e}{\bar{P}_e} + \dots \quad (28)$$

alors que ceux qui sont relatifs à la densité de probabilité de  $p_e(t)$  sont nuls. Les écarts entre  $\overline{q^{2n+1}}$  et  $\overline{p_e^{2n+1}}$  peuvent être importants car ils sont du 1er ordre en  $a_e/\bar{P}_e$ ; en outre, ils croissent rapidement avec  $n$ . Des valeurs numériques seront indiquées au § 6.

Pour les moments pairs on obtient :

$$\frac{\overline{q^4}}{(\overline{q^2})^2} = \frac{\overline{p_e^4}}{(\overline{p_e^2})^2} \left\{ 1 + 0 \frac{a_e^2}{\bar{P}_e^2} + \dots \right\} \quad (29)$$

$$\frac{\overline{q^6}}{(\overline{q^2})^3} = \frac{\overline{p_e^6}}{(\overline{p_e^2})^3} \left\{ 1 + \left[ \frac{3}{4} \frac{M^2\omega^2}{(1+M^2\omega^2)} + \frac{3}{8} \frac{M^4\omega^4 - M^2\omega^2}{(1+M^2\omega^2)^2} \right] \frac{a_e^2}{\bar{P}_e^2} + \dots \right\} \quad (30)$$

$$\frac{\overline{q^{2n}}}{(\overline{q^2})^n} = \frac{\overline{p_e^{2n}}}{(\overline{p_e^2})^n} \left\{ 1 + \left[ \frac{n}{2} \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \frac{M^2\omega^2}{1+M^2\omega^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{4(n+1)} \frac{M^4\omega^4 - M^2\omega^2}{(1+M^2\omega^2)^2} \right] \frac{a_e^2}{\bar{P}_e^2} + \dots \right\} \quad (31)$$

les écarts entre  $\overline{q^{2n}}$  et  $\overline{p_e^{2n}}$  ne deviennent appréciables que si  $n$  et  $a_e/\bar{P}_e$  sont très grands; par exemple pour  $a_e/\bar{P}_e = 0,10$  et  $M\omega \rightarrow \infty$ , l'erreur est de 1% si  $n = 3$ , de 3% si  $n = 4$  et de 6% si  $n = 5$ .

### 5. SIMULATION SUR CALCULATEUR ANALOGIQUE

Pour aborder le cas intéressant en pratique d'une perturbation  $p_e(t)$  aléatoire nous avons eu recours à un calculateur analogique. Le cas simple de la perturbation sinusoïdale servira à apprécier le degré de confiance qu'on peut avoir dans l'ensemble du montage.

L'équation différentielle de réponse du fil en régime transitoire

$$\frac{M}{\bar{P}_e} \frac{dP}{dt} + \frac{P}{\bar{P}_e} = 1$$

et la réponse du circuit correcteur d'inertie thermique

$$Q = P + M \frac{dP}{dt}$$

sont placées sur un calculateur analogique EAI TR-10 accouplé à un calculateur EAI TR-20 dont quelques éléments sont utilisées. L'Unité machine est 10 V; mais la saturation des amplificateurs n'apparaît que pour des amplitudes de 15 V environ. Les références des divers éléments sont: n° 6514 pour les amplificateurs, n° 12-263 pour les intégrateurs, n° 7045 pour les multiplieurs, n° 16101 pour les circuits formant des carrés et n° 42-187 pour les potentiomètres. Le schéma de principe et le schéma détaillé du montage sont indiqués sur les Figs. 1 et 2.

Pour adapter le phénomène à la machine on a dû le ralentir car les constantes de temps des



les signaux *A*, *B* et *C* un filtre passe-bas Dytronics-722 est utilisé, la fréquence de coupure étant respectivement réglée à 160 hz, 640 hz et 2300 hz. Pour le signal *F* un filtre passe-bas a été spécialement fabriqué (voir Annexe 2) pour que le spectre d'énergie du signal fourni soit le même que celui présenté par les fluctuations longitudinales de vitesse dans une couche limite à l'ordonnée réduite  $yu^*/\nu \approx 25$  de la paroi [7].

(3) des signaux correspondant aux fluctuations longitudinales de vitesse existant à 31 mailles en aval d'une grille biplane à barreaux carrés (maille = 2,13 cm, solidité = 0,34) pour deux vitesses de l'écoulement moyen;  $\bar{U} = 10$  m/s (signal *G*) et  $\bar{U} = 20$  m/s (signal *G'*). La veine dans laquelle est placée la grille est décrite dans [8]. Le fil utilisé est en platine; il a 2  $\mu$  de diamètre et un coefficient de surchauffe de 0,5 (ainsi  $M = 0,20$  ms à  $\bar{U} = 10$  m/s et  $M = 0,15$  ms à  $\bar{U} = 20$  m/s); il est placé dans un montage à Intensité Constante. L'intensité de la turbulence est:  $u'/\bar{U} \approx 2,7$  pour cent.

(4) un signal *L* correspondant aux fluctuations longitudinales de vitesse existant dans une couche limite à  $yu^*/\nu \approx 25$ . Dans l'installation décrite dans [8] la section utilisée est située à 1 m environ en aval de la fin de la distorsion; la vitesse à l'extérieur de la couche limite est égale à 20 m/s (ainsi  $u^* \approx 80$  cm/s et  $y = 0,05$  cm). Le fil utilisé est en platine; il a 4  $\mu$  de diamètre et un coefficient de surchauffe de 0,80; il est placé dans un montage à température constante (DISA 55 A - 01) muni d'un linéarisateur (DISA 55 D - 10). L'intensité de turbulence est;  $u'/\bar{U} \approx 20$  pour cent.

Les parties alternatives de ces signaux sont amplifiées et enregistrées sur bande magnétique (vitesse de défilement: 60 ips, temps d'enregistrement: 3 minutes environ). A la lecture (vitesse

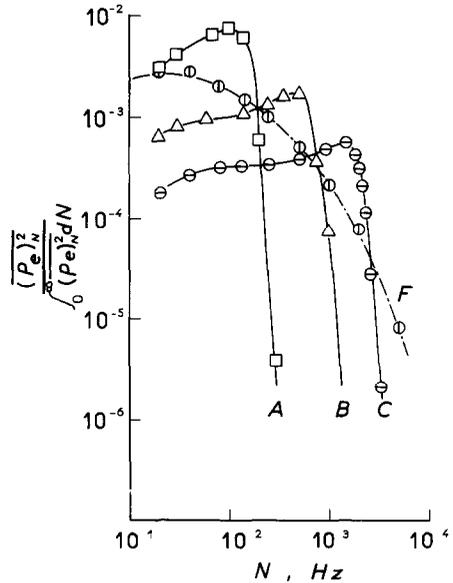


FIG. 3. Spectres normalisés des signaux de bruit gaussien *A*, *B*, *C* et *F*.

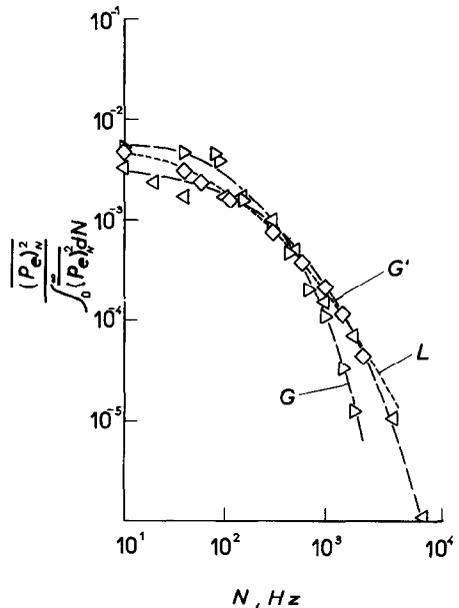


FIG. 4. Spectres normalisés des signaux turbulents *G*, *G'* et *L*.

$1\frac{7}{8}$  ips) on ajuste le gain pour réaliser le niveau  $p'_e/\bar{P}_e$  souhaité. Les spectres des signaux *A*, *B*, *C*, *F*, *G*, *G'* et *L* sont indiqués sur les Figs. 3 et 4.

L'intensité de turbulence simulée lorsque  $p'_e/\bar{P}_e = 0,10$  est égale à 25 pour cent environ.

En effet on a approximativement :

$$r_e \approx \frac{\alpha u}{I \bar{U}}$$

$\alpha$  étant le coefficient de sensibilité du fil aux fluctuations longitudinales de vitesse de petites amplitudes. Par suite

$$\frac{\sqrt{r_e^2}}{R_e - R_a} \approx \left| \frac{\alpha}{I(R_e - R_a)} \right| \frac{\sqrt{u^2}}{\bar{U}}$$

soit

$$\frac{p_e^1}{\bar{P}_e} \approx \left| \frac{\alpha}{I(R_e - R_a)} \right| \frac{u'}{\bar{U}} \approx \frac{\mathcal{C}}{2} \frac{u'}{\bar{U}} \quad (32)$$

Pour les fils utilisés usuellement  $\mathcal{C}/2$  est égal à 0,40 environ (cf. Tableau 2).

intégrant pendant 60 s la sortie de l'amplificateur n° 20. Pour déterminer les harmoniques créés dans le signal  $q(t)$  on amplifie la différence  $q(t) - p_e(t)$  par un facteur variant de 10 à 20 selon le signal étudié et on l'enregistre sur une autre piste du ruban magnétique au fur et à mesure que le calculateur analogique fonctionne; on relit l'enregistrement à grande vitesse pour effectuer l'analyse harmonique au moyen d'un d'un analyseur Hewlet Packard 302 A, d'un circuit à réponse quadratique et d'un intégrateur (temps d'intégration : 60 ou 100 s). Pour les moments d'ordre 3 ou 5 on fait fonctionner simultanément les circuits formant  $q^2(t)$  et  $q^3(t)$  [ou  $q^5(t)$ ] ainsi que les intégrateurs associés

Tableau 2. Valeurs de  $M$  et de  $\mathcal{C}$  pour différents fils chauds

Materiau	$d$ ( $\mu$ )	$l/d$	$R_a$ ( $\Omega$ )	$\frac{R - R_a}{R_a}$	$\bar{U}$ (m/s)	$M$ (ms)	$I$ (mA)	$\alpha$ (mV)	$\mathcal{C}$
Platine	4	100	3,80	0,57	20	0,35	53	44	0,77
		100	3,83	0,73	10	0,45	53	51	0,69
		200	12,8	0,52	20	0,15	20	44	0,67
Platine + 10% rhodium.	3,5	100	12,5	0,35	20	0,33	45	70	0,71
		100	12,5	0,35	8,5	0,40	41	58	0,64
Tungstène	5	130	3,98	0,53	15	0,60	80	82	0,97
		120	3,27	0,45	15	0,57	70	48	0,93

L'exécution des mesures est décrite de façon très complète dans [9]—Indiquons simplement ici que pour mettre en évidence les erreurs systématiques recherchées, il importe de s'affranchir de la dispersion provenant de la nature aléatoire des perturbations  $p_e(t)$ ; aussi on opère sur les différences  $Q(t) - P_e(t)$  ou  $q(t) - p_e(t)$  chaque fois que cela est possible et on se réfère toujours au même échantillon de  $p_e(t)$  lorsqu'on fait varier  $M$ .† Ainsi on détermine  $\bar{Q} - \bar{P}_e$  en

(temps d'intégration 60 s); le signal  $q(t)$  est au préalable amplifié afin que le fonctionnement des multiplicateurs n° 8, 12 et 4 a soit correct.

## 6. RESULTATS RELATIFS A DES PERTURBATIONS SINUSOIDALES

Les Figs. 5–8 traduisent l'ensemble des résultats. On peut constater qu'un accord satisfaisant existe entre les mesures et les expressions (17), (25), (26) et (27).

Les écarts qui apparaissent aux petites valeurs de  $M\omega$  ou de  $a_e/\bar{P}_e$  pourraient provenir de la réponse approchée des chaînes de diodes qui équipent le diviseur n° 4 formant  $P/P_e$  (ligne polygonale à 5 segments au lieu d'une parabole). Dans ce cas,  $P(t)$  est en effet voisin de  $P_e(t)$  et une petite partie seulement de la ligne polygonale utilisée; l'erreur sur  $P/P_e$  serait alors très

† La dispersion dont on veut s'affranchir est de l'ordre de  $\pm 6$  pour cent. En effet, d'après Lumley-Parnofsky [10], la précision  $\varepsilon$  sur le moment d'ordre 4 est

$$\varepsilon \approx \pm \left( \frac{64 \mathcal{J} 1}{3 4 T} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$\mathcal{J}$  étant la macro-échelle relative à l'autocorrélation temporelle du signal ralenti et  $T$  le temps d'intégration. Par exemple pour le signal  $G$ ,  $\mathcal{J} \approx 32 \times 0,5 \mathcal{M} U^{-1} \approx 3,4 \cdot 10^{-2}$  s et  $T \approx 60$  s, d'où  $\varepsilon \approx \pm 5,5$  pour cent.

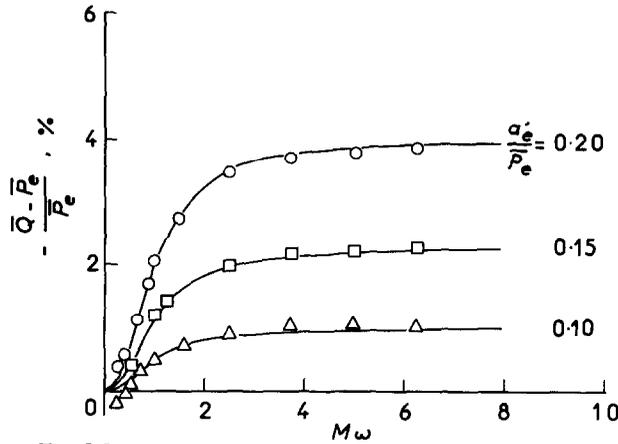


FIG. 5. Erreur sur la valeur moyenne dans le cas de signaux sinusoïdaux, —: équation (17)  $\triangle$   $\square$   $\circ$ : points expérimentaux relatifs à  $a'_e/\bar{P}_e = 0,10; 0,15; 0,20$ .

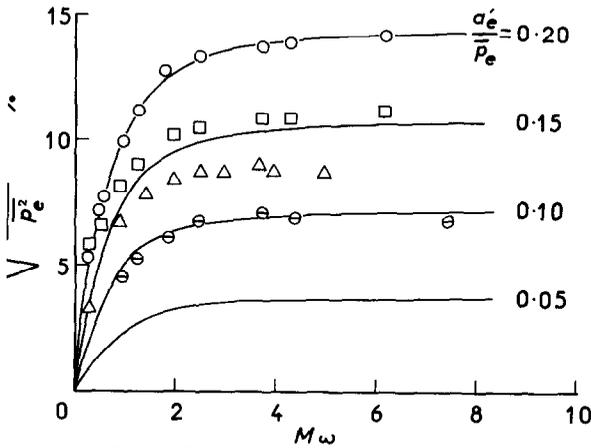


FIG. 6. Valeur efficace du premier harmonique créé dans le cas de signaux sinusoïdaux, —: équation (25)  $\circ$   $\triangle$   $\square$   $\circ$ : points expérimentaux relatifs à  $a'_e/\bar{P}_e = 0,05; 0,01; 0,15; 0,20$ .

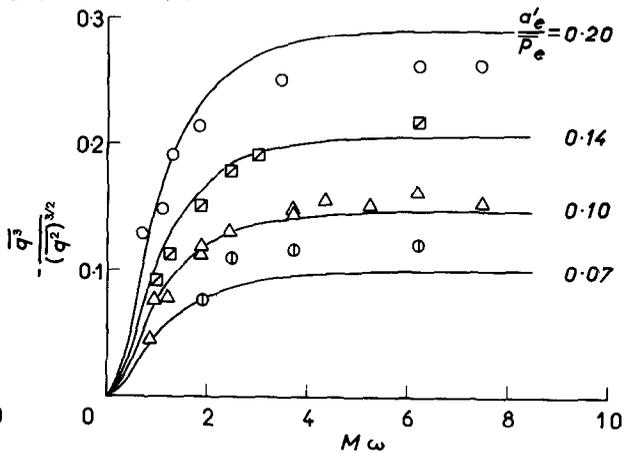


FIG. 7. Erreur sur le moment d'ordre Trois dans le cas de signaux sinusoïdaux, —: équation (26)  $\circ$   $\triangle$   $\square$   $\circ$ : points expérimentaux relatifs à  $a'_e/\bar{P}_e = 0,07; 0,10; 0,14; 0,20$ .

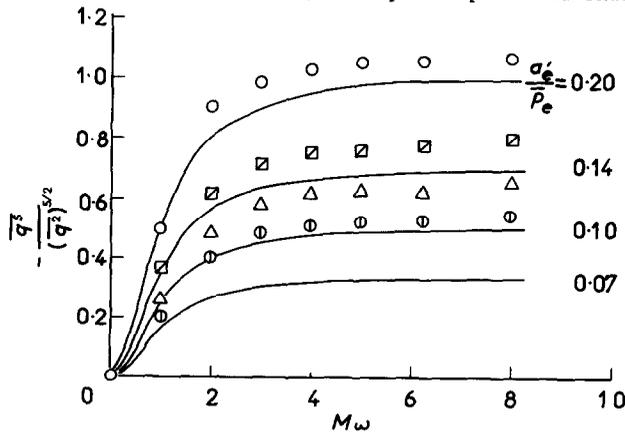


FIG. 8. Erreur sur le moment d'ordre Cinq dans le cas de signaux sinusoïdaux, —: équation (27)  $\circ$   $\triangle$   $\square$   $\circ$ : points expérimentaux relatifs à  $a'_e/\bar{P}_e = 0,07; 0,10; 0,14; 0,20$ .

dépendante de la position de cette partie relativement à la parabole idéale; au cours d'essais portant sur  $\bar{P} - \bar{P}_e$  on a constaté qu'on pouvait modifier la différence résiduelle en agissant sur  $\bar{P}_e$ , et même l'annuler en choisissant  $\bar{P}_e = 2,70 \text{ V}$ .

Pour des signaux aléatoires la précision des essais est sans doute en peu inférieure à celle qu'on obtient pour des signaux sinusoïdaux, à cause de la grande probabilité d'existence des petites amplitudes et de la valeur élevée prise en même temps par le facteur de crête.

#### 7. RESULTATS RELATIFS A DES PERTURBATIONS ALEATOIRES

L'écart entre les valeurs moyennes  $\bar{P}_e$  et  $\bar{Q}$  (ou  $\bar{P}$ ) est indiqué sur la Fig. 9. Il semble négligeable dans la plupart des cas. On pourrait

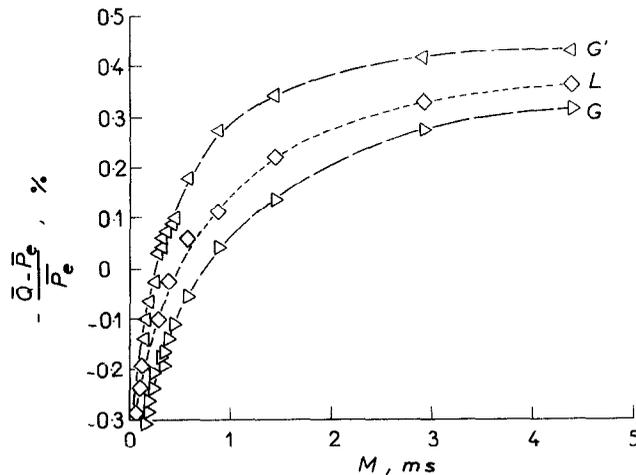


Fig. 9. Erreur sur la valeur moyenne dans le cas des signaux turbulents G, G' et L ( $p_e/\bar{P}_e = 0,10$  soit  $u'/\bar{U} \approx 0,25$ ).

utiliser ce résultat pour simplifier l'éventuelle réalisation d'un anémomètre à Intensité Constante basée sur l'équation (14). Comme il s'agit dans ce cas d'obtenir  $P_e(t)$  à partir de  $P(t)$ , la valeur moyenne  $\bar{P}_e$  est inconnue; il est alors avantageux de la remplacer simplement par  $\bar{P}$ , valeur qui est déterminable dans chaque essai. C'est à un tel anémomètre, dont l'inertie thermique est compensée pour les fluctuations

de vitesse de grande amplitude, qu'on pourrait songer à adjoindre un linéarisateur.

Remarquons que l'écart entre  $\bar{Q}$  et  $\bar{P}_e$  n'est probablement pas négligeable dans le relevé de la courbe d'étalonnage d'un fil, car la différence de potentiel moyenne aux bornes du fil doit être déterminée à mieux de  $\pm 0,1$  pour cent pour qu'une précision de  $\pm 1$  pour cent soit assurée sur les coefficients de sensibilité du fil.

L'énergie relative des harmoniques créés est indiquée sur les Figs. 10-12; l'indice "N" rappelle que l'on compare, à la fréquence N, l'énergie apportée par les harmoniques créés et celle qui existe dans le signal  $p_e(t)$ . A cause du bruit de l'ensemble de l'appareillage on n'a pas pu explorer les fréquences supérieures à 2 kHz environ. La fréquence  $N = 1 \text{ kHz}$  correspond à des composantes longitudinales  $k_1$  du nombre

d'onde de Kolmogorov étant environ 45, 75 et signaux G, G' et L respectivement, les nombres d'onde de Kolmogorov étant environ 45, 75 et  $300 \text{ cm}^{-1}$ .

Aux hautes fréquences l'erreur devient d'autant plus importante que le spectre de  $\bar{p}_e^2$  décroît plus rapidement avec N. En admettant que cette décroissance s'effectue selon une loi en  $N^{-n}$  et en supposant, dans un schéma simple,

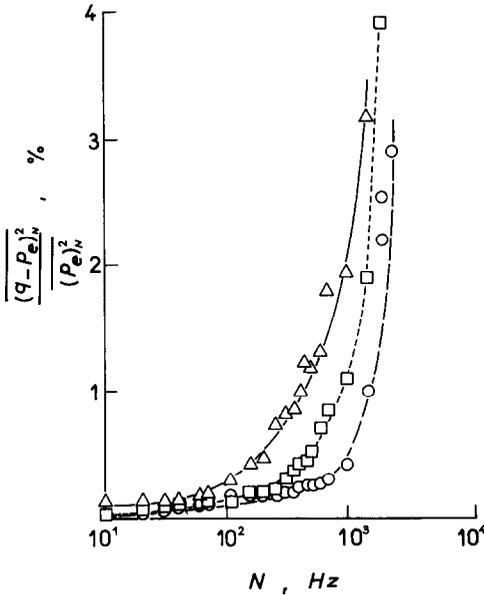


FIG. 10. Energie des harmoniques créés dans le cas du signal turbulent G ( $p_e/P_e = 0,10$  soit  $u/U \approx 0,25$ ).  
 ○ □ △  $M = 0,094$  ms;  $0,312$  ms;  $0,940$  ms.

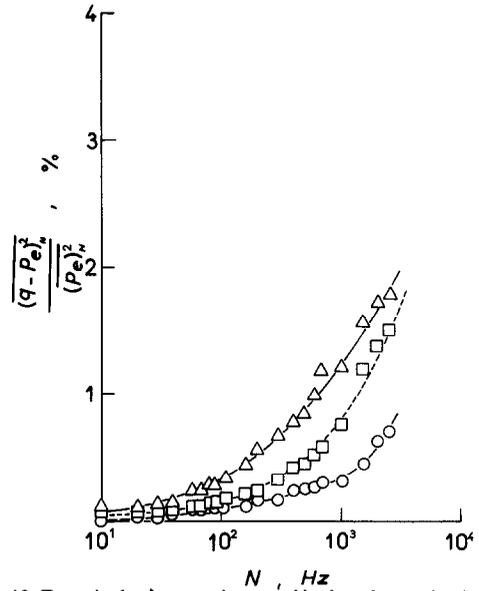


FIG. 12. Energie des harmoniques créés dans le cas du signal turbulent L ( $p_e/P_e = 0,10$  soit  $u/U \approx 0,25$ ).  
 ○ □ △  $M = 0,094$  ms;  $0,312$  ms;  $0,940$  ms.

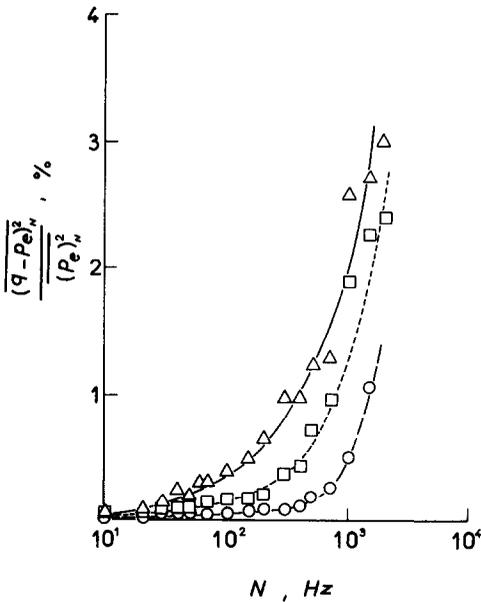


FIG. 11. Energie des harmoniques créés dans le cas du signal turbulent G' ( $p_e/P_e = 0,10$  soit  $u/U \approx 0,25$ ).  
 ○ □ △  $M = 0,094$  ms;  $0,312$  ms;  $0,940$  ms.

que toute l'erreur à la fréquence  $N$  provient de la fréquence  $N/2$  et qu'elle est égale à l'erreur maximale présentée par un signal sinusoïdal de même valeur efficace on a :

$$\frac{|q - p_e|_N^2}{|p_e|_N^2} \approx 2^n \frac{|q - p_e|_{N/2}^2}{|p_e|_{N/2}^2} \approx 2^n \times 0,5 \cdot 10^{-2}.$$

Ainsi, pour  $n = -\frac{5}{3}$  l'erreur n'est que de 1,6 pour cent; mais pour  $n = -7$  elle atteint 64 pour cent.

Enfin nous représentons sur les Figs. 13 et 14 les résultats relatifs aux moments d'ordre 3 et 5. Un écart systématique se manifeste entre  $\overline{q^3}/(\overline{q^2})^{\frac{3}{2}}$  et  $\overline{p_e^3}/(\overline{p_e^2})^{\frac{3}{2}}$  d'une part, et entre  $\overline{q^5}/(\overline{q^2})^{\frac{5}{2}}$  et  $\overline{p_e^5}/(\overline{p_e^2})^{\frac{5}{2}}$  d'autre part; rappelons que les moments relatifs à  $p_e$  correspondent à  $M = 0$ . Comme on peut s'y attendre la valeur de l'écart est d'autant plus grande que le signal considéré contient davantage de hautes fréquences. Mais ce qui est plus surprenant est le fait que des écarts différents soient présentés par des signaux ayant des spectres assez voisins (signaux F et L par exemple); il est heureux que ces écarts soient

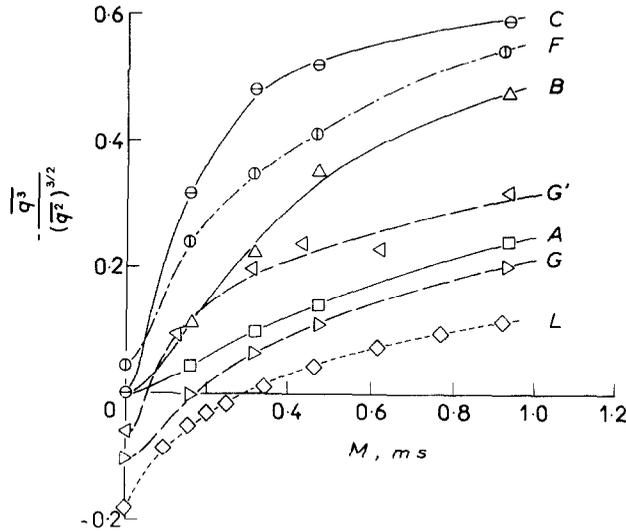


FIG. 13. Erreur sur le moment d'ordre Trois dans le cas des signaux de bruit gaussien A, B, C, F et des signaux turbulents G, G', L ( $p_e/\bar{P}_e = 0,10$  soit  $u'/\bar{U} \approx 0,25$ ).

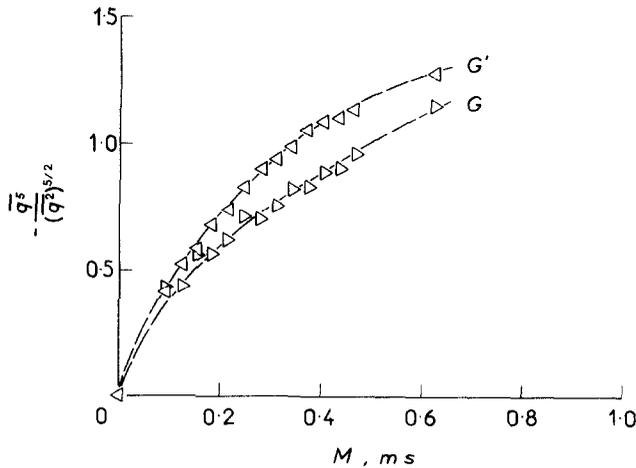


FIG. 14. Erreur sur le moment d'ordre Cinq dans le cas des signaux turbulents G et G' ( $p_e/\bar{P}_e = 0,10$  soit  $u'/\bar{U} \approx 0,25$ ).

précisément petits dans le cas des signaux turbulents. Pour passer aux erreurs qui entachent les moments d'ordre 3 et 5 relatifs aux fluctuations de vitesse  $u(t)$ , on doit tenir compte d'un changement de signe; pour un fil placé dans un montage à Intensité Constante,  $u > 0$  correspond en effet à  $p_e < 0$  et à  $q < 0$ .

Comparons maintenant ces erreurs à celles qui proviennent de la non-linéarité de la relation

algébrique  $R_e = R_e(U)$  traduisant la loi d'échange thermique du fil en régime permanent. Les expressions des erreurs de non-linéarité sont établies dans L'Annexe I et, dans le cas simple d'une turbulence isotrope et gaussienne, elles prennent la forme approchée suivante :

$$\frac{\bar{p}_e^3}{(\bar{p}_e^2)^{3/2}} \approx \frac{3}{2} \left( \frac{1}{2} + \mathcal{O} \right) \left[ \frac{\bar{u}^4}{(\bar{u}^2)^2} - 1 \right] \frac{u'}{\bar{U}} \quad (33)$$

$$\frac{\overline{p_e^5}}{(\overline{p_e^2})^{\frac{5}{2}}} \approx \frac{5}{2}(\frac{1}{2} + \mathcal{C}) \left[ \frac{\overline{u^6}}{(\overline{u^2})^3} - \frac{\overline{u^4}}{(\overline{u^2})^2} \right] \frac{u'}{\overline{U}} \quad (34)$$

avec (c.f. tableau 2):

$$\mathcal{C} \equiv \frac{-2\alpha}{I(R_e - R_a)} \approx 0,80.$$

Tout d'abord en rapprochant (33) et (34) de (26) et (27), on constate que les sens des deux erreurs sont opposés. Ensuite, pour  $u'/\overline{U} = 0,25$  (valeur qui correspond à  $p_e'/\overline{P_e} = 0,10$ , cf. §5), (33) et (34) conduisent à des erreurs égales à  $-0,97$  et  $-9,7$  sur les moments d'ordre 3 et 5 des fluctuations de vitesse. Une comparaison avec les résultats des Figs. 13 et 14 révèle que l'importance relative des deux erreurs dépend considérablement du signal utilisé et de la constante de temps  $M$ . Sur le moment d'ordre 3 par exemple la valeur  $-0,97$  est à rapprocher de  $0,21$  dans le cas du signal  $L$ , et de  $+0,34$  dans le cas du signal  $F$ , les erreurs dues à l'excitation paramétrique étant prises à la valeur intermédiaire  $M = 0,4$  ms. Notons aussi que dans le cas, certes un peu simpliste, de fluctuations sinusoïdales, (33) et (34) conduisent à des erreurs égales à  $-0,24$  et  $-0,81$  et (26) et (27) à des erreurs maximales égales à  $+0,105$  et  $+0,35$ .

La considération de l'erreur d'excitation paramétrique ne semble donc pas fournir une explication entière des écarts systématiques observés sur les moments d'ordre 3 des fluctuations de vitesse par exemple, entre les résultats obtenus à partir d'un anémomètre à Intensité Constante (et corrigés approximativement de la non-linéarité statique) et les résultats fournis par un anémomètre à Température Constante muni d'un linéarisateur ([7] figure III. 6 et p. 52; [11] et [12], voir [12] figure 10). Les questions qu'on pourrait alors tenter d'approfondir nous paraissent être les suivantes:

- Analyse de l'action du filtre passe-haut mentionnée par Van Atta et Chen [12].
- Examen de l'effet d'excitation paramétrique dans les anémomètres à

Température Constante. Deux étapes sont nécessaires: on étudierait d'abord le comportement du fil associé au circuit d'asservissement, le récent rapport de Freymuth [13] servant de base de départ; ensuite on aborderait la transformation par le linéarisateur des signaux disponibles aux bornes du pont.

- Mesure des moments d'ordre 3 des fluctuations de vitesse au moyen de différents anémomètres dans un même champ de turbulence quasi-isotrope et intense. L'emploi de jets multiples disposés en porc-épic [14] ou celui de grilles soufflantes [15] pourrait être avantageux.
- Examen de l'influence de la forme du signal  $p_e(t)$  sur l'effet d'excitation paramétrique. On pourrait par exemple chercher la cause de la différence observée entre le comportement d'un bruit gaussien et celui d'un signal turbulent. On pourrait aussi considérer le cas, très fréquent en pratique, de signaux turbulents intermittents.
- Essai d'extension de l'équation (11) au cas des fils qui n'ont pas un allongement infini.

Enfin l'effet des harmoniques créés devrait aussi être considéré dans d'autres mesures qui sont fondamentales dans l'analyse des écoulements turbulents, par exemple celle du coefficient de dissymétrie des dérivées par rapport au temps des fluctuations longitudinales de vitesse. Quelques tentatives d'essais sur machine analogique n'ont pas abouti à cause des difficultés rencontrées pour dériver le signal  $q(t)$ . Cependant si l'on considère le cas d'un signal sinusoïdal on calcule aisément  $\dot{q} \equiv dq/dt$  à partir de (23) et on obtient

$$\frac{\overline{\dot{q}^3}}{(\overline{\dot{q}^2})^{\frac{3}{2}}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \frac{M\omega}{(1+M^2\omega^2)} \frac{a_e}{\overline{P_e}}$$

Les courbes de  $\overline{\dot{q}^3}/(\overline{\dot{q}^2})^{\frac{3}{2}}$  en fonction de  $M\omega$  se distinguent de celles qu'on a indiquées pour  $\overline{q^3}/(\overline{q^2})^{\frac{3}{2}}$  essentiellement par leur comportement aux grandes valeurs de  $M\omega$ : après un maximum

qui est atteint pour  $M\omega = 1$ , et dont la valeur est par exemple égale à 0,15 pour  $a'_e/\overline{P}_e = 0,10$ , les courbes sont asymptotes à l'axe des  $M\omega$ . On peut donc s'attendre à ce que les erreurs sur  $\overline{u^3}/(\overline{u^2})^{\frac{3}{2}}$  soient inférieures à celles qui portent sur  $u^3/(u^2)^{\frac{3}{2}}$ .

### REMERCIEMENTS

Les essais ont été effectués au Laboratoire de Calcul de l'Université de Grenoble; nous remercions Monsieur R. Bouttaz de ses nombreux conseils sur l'emploi des calculateurs analogiques et Monsieur A. Eberhard de son aide dans les calculs numériques. Aux Laboratoires de Mécanique des Fluides et des Sols de l'Université de Grenoble nous remercions spécialement Monsieur J. Marechal pour les enregistrements de turbulence effectués dans son installation et Monsieur C. Hussenet Desononges pour le filtre construit.

### REFERENCES

1. S. CORRSIN, Turbulence: Experimental methods, *Handbuch der Physik*, Vol. 8-2, pp. 523-590, Springer, Berlin (1963).
2. R. C. MARTINELLI et R. D. RANDALL, The behavior of a hot-wire anemometer subjected to a periodic velocity, *Trans. Am. Soc. Mech. Engrs* **68**, 75-79 (1964).
3. N. MINORSKY, *Non-linear Oscillations*, Van Nostrand, New York (1962).
4. W. J. CUNNINGHAM, Analyse non linéaire, *Résolution des Equations Différentielles*, Dunod, Paris (1963).
5. F. R. MOULTON, *Differential Equations*, Dover, New York (1958).
6. H. L. DRYDEN et A. M. KUETHE: The measurement of fluctuations of air speed by the hot-wire anemometers N.A.C.A. Rep. 320 (1929).
7. G. COMTE-BELLOT, Ecoulement turbulent entre deux parois parallèles, *Publ. Sci. Tech. Min. Air. Paris* No. 419 (1959).
8. J. MARECHAL, Dispositif expérimental pour l'étude de la déformation pure plane de la turbulence homogène, *C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci.*, Paris **265A**, 69-71 (1967).
9. J. P. SCHON, Excitation paramétrique dans les anémomètres à fil chaud, D.E.A., Univ. de Lyon (1968).
10. J. L. LUMLEY et H. A. PANOFKY, *The Structure of Atmospheric Turbulence*, Interscience, New York (1964).
11. F. N. FRENKIEL et P. S. KLEBANOFF, Correlations measurement in a turbulent flow using high-speed computing techniques, *Phys. Fluids* **10**, No. 8, 1737-1747 (1967).
12. C. W. VAN ATTA et W. Y. CHEN, Correlation measurements in grid turbulence using digital harmonic analysis, *J. Fluid Mech. Mech.* **34**, 497-515 (1968).
13. P. FREYMUTH, Non-linear control theory for constant-temperature hot-wire anemometers, *Advances in Hot-wire Anemometry*, Intern. Symp. Univ. of Maryland, AFOSR no. 68-1492 (1967).
14. R. BETCHOV, On the fine structure of turbulent flows, *J. Fluid Mech.* **3**, 205-216 (1957).

15. J. MATHIEU et E. ALCARAZ, Réalisation d'une soufflerie à haut niveau de turbulence, *C.R. Hebd. Séanc. Acad. Sic.*, Paris **261**, II, 2435-2438 (1965).
16. R. R. MILLS, A. L. KISTLER, V. O'BRIEN et S. CORRSIN, Turbulence and temperature fluctuations behind a heated grid, N.A.C. TN 4288, (1958).
17. G. COMTE-BELLOT: Moments d'ordre 3 et 4 des distributions de probabilité des fluctuations de vitesse et de leurs dérivées dans les écoulements turbulents, Colloque Contribution de l'Electronique aux méthodes de traitement statistique des mesures en physique, Grenoble 1966, (non publié).
18. R. DUMAS et J. MARCILLAT, Répartition en amplitude de la vitesse dans une couche limite turbulente, *C.R. Hebd. Séanc. Acad. Sci.*, Paris **262A**, 700-703 (1966).
19. F. H. CHAMPAGNE, C. A. SLEICHER et O. H. WEHRMANN, Turbulence measurements with inclined hot-wires—Part I, *J. Fluid. Mech.* **28**, 153-176 (1967).

### ANNEXE I

#### Erreur due à la Non-Linéarité de la Loi d'Echange Thermique du fil (Montage à Intensité Constante)

Considérons un fil chaud placé normalement à l'écoulement et supposons d'abord qu'il a un allongement infini.

Lorsqu'elles présentent de grandes amplitudes les composantes longitudinales des fluctuations de vitesse sont traduites de façon erronée par un tel fil à cause de la courbure de la courbe d'étalonnage [16] et de la présence des fluctuations transversales de vitesse. L'exécution de l'étalonnage a évidemment lieu dans un écoulement à intensité de turbulence négligeable.

On peut approximativement calculer le signal  $r_e \equiv R_e - \overline{R}_e$  transmis par le fil en effectuant un développement limité de  $R_e$  autour du point de fonctionnement ( $U_0 = \overline{U}$ ,  $V_0 = 0$ ) et en exprimant les dérivées qui interviennent au moyen d'une loi d'échange du type loi de King

$$\frac{R_e I^2}{R_e - R_a} = \mathcal{A} + \mathcal{B}(U^2 + V^2)^{\frac{1}{2}} \quad (34)$$

à coefficients  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  constants. On obtient alors, aux termes du 4ème ordre près:

$$r_e \equiv R_e - \overline{R}_e = \alpha_1 \frac{u}{\overline{U}} + \beta_1 \frac{u^2 - \overline{u^2}}{\overline{U}^2} + \beta_2 \frac{v^2 - \overline{v^2}}{\overline{U}^2} + \gamma_1 \frac{u^3 - \overline{u^3}}{\overline{U}^3} + \gamma_2 \frac{uv^2 - \overline{uv^2}}{\overline{U}^3} \quad (35)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &\equiv U_0 \frac{\partial R_e}{\partial U_0} \\
 \beta_1 &\equiv \frac{1}{2} U_0^2 \frac{\partial^2 R_e}{\partial U_0^2} = -\frac{\alpha_1}{2} (\frac{1}{2} + \mathcal{C}) \\
 \beta_2 &\equiv \frac{1}{2} U_0^2 \frac{\partial^2 R_e}{\partial V_0^2} = \frac{\alpha_1}{2} \\
 \gamma_1 &\equiv \frac{1}{6} U_0^3 \frac{\partial^3 R_e}{\partial U_0^3} = \frac{\alpha_1}{4} (\frac{1}{2} + \mathcal{C} + \mathcal{C}^2) \\
 \gamma_2 &\equiv \frac{1}{2} U_0^3 \frac{\partial^3 R_e}{\partial U_0 \partial V_0^2} = -\frac{\alpha_1}{2} (\frac{3}{2} + \mathcal{C})
 \end{aligned} \quad (36)$$

et

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C} &\equiv \frac{\mathcal{B} \sqrt{U_0}}{\mathcal{A} - I^2 + \mathcal{B} \sqrt{U_0}} = \frac{\mathcal{B} \sqrt{U}}{\mathcal{A} - I^2 + \mathcal{B} \sqrt{U}} \\
 &= -\frac{2\alpha}{I(R_e - R_a)} \quad (37)
 \end{aligned}$$

Dans (35) il n'intervient pas de termes où figurent des puissances impaires de  $v$  car  $R_e$  est une fonction paire de  $V$  autour de  $V_0 = 0$ .

Indiquons en passant que cette méthode de calcul est applicable à un anémomètre à Température Constante (dans (34) on considère que  $I$  est fonction de  $U$ ) et également à un anémomètre à Température Constante muni d'un linéarisateur [à la place de (34) on utilise une relation du type  $I = \mathcal{A}' + \mathcal{B}' \sqrt{(U^2 + V^2)}$ ]. On peut aussi l'étendre aux signaux transmis par une paire de fils croisés [17].

De (35) on déduit les expressions

$$\begin{aligned}
 \overline{r_e^2} &= \alpha_1^2 \frac{u'^2}{\overline{U}^2} \left\{ 1 + 2 \frac{u'}{\overline{U}} \left[ \frac{\beta_1}{\alpha_1} \frac{\overline{u^3}}{u'^3} + \frac{1}{2} \frac{v'^2}{u'^2} \frac{\overline{uv^2}}{u'v'^2} \right] + 2 \frac{u'^2}{\overline{U}^2} \left[ \frac{\gamma_1}{\alpha_1} \frac{\overline{u^4}}{u'^4} + \frac{\gamma_2}{\alpha_1} \frac{v'^2}{u'^2} \frac{\overline{u^2 v^2}}{u'^2 v'^2} + \frac{1}{2} \frac{\beta_1^2}{\alpha_1^2} \left( \frac{\overline{u^4}}{u'^4} - 1 \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{8} \frac{v'^4}{u'^4} \left( \frac{\overline{v^4}}{v'^4} - 1 \right) + \frac{1}{2} \frac{\beta_1}{\alpha_1} \frac{v'^2}{u'^2} \left( \frac{\overline{u^2 v^2}}{u'^2 v'^2} - 1 \right) \right] \right\} \quad (38)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{r_e^3} &= \alpha_1^3 \frac{u'^3}{\overline{U}^3} \left\{ \frac{\overline{u^3}}{u'^3} + 3 \frac{u'}{\overline{U}} \left[ \frac{\beta_1}{\alpha_1} \left( \frac{\overline{u^4}}{u'^4} - 1 \right) + \frac{1}{2} \frac{v'^2}{u'^2} \left( \frac{\overline{u^2 v^2}}{u'^2 v'^2} - 1 \right) \right] + 3 \frac{u'^2}{\overline{U}^2} \left[ \frac{\gamma_1}{\alpha_1} \left( \frac{\overline{u^5}}{u'^5} - \frac{\overline{u^3}}{u'^3} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\gamma_2}{\alpha_1} \frac{v'^2}{u'^2} \left( \frac{\overline{u^3 v^2}}{u'^3 v'^2} - \frac{\overline{uv^2}}{u'v'^2} \right) + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1^2} \left( \frac{\overline{u^5}}{u'^5} - 2 \frac{\overline{u^3}}{u'^3} \right) + \frac{1}{4} \frac{v'^4}{u'^4} \left( \frac{\overline{uv^4}}{u'v'^4} - 2 \frac{\overline{uv^2}}{u'v'^2} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \frac{v'^2}{u'^2} \left( \frac{\overline{u^3 v^2}}{u'^3 v'^2} - \frac{\overline{u^3}}{u'^3} - \frac{\overline{uv^2}}{u'v'^2} \right) \right] \right\} \quad (39)
 \end{aligned}$$

Lorsque la turbulence est quelconque ces expressions sont peu utilisables car les nombreux moments d'ordre supérieur des fluctuations de vitesse qui interviennent ne sont pas connus. Mais elles se simplifient dans l'hypothèse d'une turbulence isotrope et gaussienne. En particulier les termes de 2ème ordre subsistent seulement dans  $\overline{r_e^2}$ ; en les négligeant on obtient alors les expressions simples :

$$\frac{\overline{r_e^2}}{(\overline{r_e^2})^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\overline{u^3}}{(\overline{u^2})^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2} (\frac{1}{2} + \mathcal{C}) \left( \frac{\overline{u^4}}{u'^4} - 1 \right) \frac{u'}{\overline{U}} \quad (40)$$

$$\frac{\overline{r_e^3}}{(\overline{r_e^3})^{\frac{1}{3}}} = -\frac{\overline{u^5}}{(\overline{u^2})^{\frac{5}{2}}} + \frac{5}{2} (\frac{1}{2} + \mathcal{C}) \left( \frac{\overline{u^6}}{u'^6} - \frac{\overline{u^4}}{u'^4} \right) \frac{u'}{\overline{U}} \quad (41)$$

et plus généralement

$$\begin{aligned}
 \frac{\overline{r_e^{2n-1}}}{(\overline{r_e^{2n-1}})^{\frac{1}{2n-1}}} &= -\frac{\overline{u^{2n-1}}}{(\overline{u^2})^{n-\frac{1}{2}}} + \frac{2n-1}{2} (\frac{1}{2} + \mathcal{C}) \left( \frac{\overline{u^{2n}}}{u'^{2n}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\overline{u^{2n-2}}}{u'^{2n-2}} \right) \frac{u'}{\overline{U}} \quad (42)
 \end{aligned}$$

Dans ces résultats nous avons laissé figurer les quantités  $\overline{u^3}/(\overline{u^2})^{\frac{3}{2}}$ ,  $\overline{u^5}/(\overline{u^2})^{\frac{5}{2}}$ , bien qu'elles soient nulles, afin que le sens des erreurs apparaisse clairement. Rappelons que  $r_e \equiv p_e$  et que  $\mathcal{C} \equiv 0,80$  (cf. §5). Par ailleurs  $\overline{u^{2n}} = 1.3 \dots (2n-1) u'^{2n}$  pour un signal aléatoire gaussien et

$$\overline{u^{2n}} = \frac{1}{2^n} \frac{2n(2n-1) \dots (n+1)}{1.2 \dots n} u'^{2n}$$

pour un signal sinusoïdal.

Les récentes évaluations proposées par Dumas et Marcillat [18] ou par Frenkiel et Klebanoff [11] diffèrent essentiellement de la nôtre par le fait que le signal  $q(t)$ —et non pas le signal  $p_e(t)$ —est relié à  $u(t)$  au moyen de l'expression (34). L'erreur due à l'excitation paramétrique n'est ainsi pas dissociée de celle qui provient de la non-linéarité de la loi d'échange thermique statique. On doit aussi remarquer que l'inversion de la loi (34) ne permet la détermination des caractéristiques statistiques de  $u(t)$  à partir de celles de  $p_e(t)$  que si les composantes transversales  $v(t)$  ont un effet négligeable [11].

Lorsque l'allongement du fil n'est pas infini on peut aisément examiner l'influence des composantes  $w(t)$  parallèles au fil en utilisant une loi d'échange de la forme

$$\frac{R_e I^2}{R_e - R_a} = \mathcal{A} + \mathcal{B}(U^2 + V^2 + kW^2)^{\frac{1}{2}}$$

où  $k$  est en général inférieur à 0,20 [19]. Les termes supplémentaires qui interviennent dans (35) sont ceux qui présentent la parité en  $w$  convenable, soit

$$\beta_3 \frac{w^2 - \bar{w}^2}{\bar{U}^2} \quad \text{et} \quad \gamma_3 \frac{uw^2 - \bar{u}\bar{w}^2}{\bar{U}^3}$$

avec

$$\beta_3 \equiv \frac{1}{2} U_0^2 \frac{\partial^2 R_e}{\partial W_0^2} = k^2 \beta_2$$

$$\gamma_3 \equiv \frac{1}{2} U_0^3 \frac{\partial^3 R_e}{\partial U_0 \partial W_0^2} = k^2 \gamma_2$$

les dérivées étant évaluées pour  $U_0 = \bar{U}$  et  $W_0 = 0$ . Comme  $k^2$  est inférieur à 0,04 on peut espérer que ces termes sont toujours négligeables.

ANNEXE 2

Filtre Passe-Haut Fournissant le Signal F

Le filtre construit est représenté sur la Fig. 15.

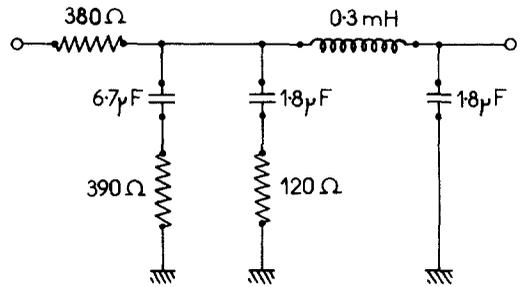


FIG. 15.

Il est relié au générateur de bruit Hewlett-Packard 1390 A par l'intermédiaire d'un amplificateur opérationnel Kintel 112-A qui assure une adaptation correcte des impédances et un gain égal à 20.

**Abstract**—The thermal lag of wires and the large amplitude of velocity fluctuations act together to generate higher harmonics in hot-wire responses. These harmonics are studied by setting on an analog computer the differential equation corresponding to the wire response, a coefficient of which is a random function of time. For various perturbations (gaussian random noise, grid-turbulence, wall-turbulence) the systematic errors affecting the measurements performed by means of constant-current anemometers are evaluated. For example, for a 25 per cent turbulence intensity investigated with a hot-wire having a time constant of 0.4 ms (mean speed of the flow: 10 to 20 m/s), the measured spectra error would be 4 per cent in excess when the slope of the spectral curve is around  $-\frac{5}{3}$ ; a 60 per cent error in excess is estimated when this slope is around  $-7$ . The error on the third moment of the probability density function of the velocity fluctuations would arise to 25 per cent of that due to the non-linearity of the steady state heat-transfer law of the wire, its sign being opposite.

**Zusammenfassung**—Die thermische Trägheit der Drähte und die grosse Amplitude der Geschwindigkeitsschwankungen wirken zusammen, höhere Harmonische bei Hitzdrahtsignalen zu erzeugen. Die Harmonischen werden durch Ansetzen eines Analogrechners auf die dem Drahtsignal entsprechende Differentialgleichung, deren Konstante eine willkürliche Funktion der Zeit ist, untersucht. Für verschiedene

Störungen (Rauschen, Gitterturbulenz, Wandturbulenz) werden die systematischen Fehler ermittelt, die die Messungen welche bei konstantem Strom durchgeführt wurden, beeinflussen. Zum Beispiel würde für eine 25 Prozent Turbulenz-Intensität—untersucht mit einem Hitzdraht, der eine Zeitkonstante von 0,4 ms besitzt (mittlere Strömungsgeschwindigkeit 10 bis 20 m/s)—der gemessene Spektrenfehler über 4 Prozent sein, wenn die Neigung der Spektral-Kurve ungefähr  $\frac{5}{3}$  beträgt; ein Fehler von über 60 Prozent wird geschätzt, wenn die Neigung ungefähr  $\frac{7}{3}$  beträgt. Der Fehler für das dritte Moment der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Geschwindigkeitsschwankungen würde 25 Prozent des Fehlers ergeben, der wegen der Nichtlinearität des stationären Wärmeübergangsgesetzes des Drahtes entsteht, wobei sein Vorzeichen entgegengesetzt ist.

**Аннотация**—Тепловая инерция нитей совместно с большими по амплитуде пульсациями скорости приводит к появлению на выходе термоанемометра гармоник высокого порядка. Эти гармоники изучаются на аналоговой вычислительной машине решением дифференциального уравнения чувствительности нити с коэффициентом, являющимся случайной функцией времени. Для различных возмущений (гауссовский случайный шум, турбулентность за решеткой, пристенная турбулентность) определяются систематические погрешности, влияющие на измерения, проведенные с помощью термоанемометра постоянного тока. Например, при исследовании течения с интенсивностью турбулентности в 25 % с помощью термоанемометра постоянная времени нити, которая равна 0,4 мкс (средняя скорость потока от 10 до 20 м/сек), погрешность измерения спектра составляла бы 4 % в сторону завышения результата при наклоне спектральной кривой —  $\frac{5}{3}$  и 60 % опять в сторону завышения результата при наклоне кривой порядка 7. Погрешность измерения функции плотности вероятности третьих моментов пульсаций скорости составляла бы 25 % за счет нелинейного характера теплообмена нагретой проволоочки, причем измерения будут давать значительный результат.